**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Karolina Ocvirek

# VIŠESTRUKO ŽIVOTNO OSIGURANJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv. prof. dr. sc. Miljenko Huzak

Zagreb, rujan 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

*Zahvaljujem izv. prof. dr. sc. Miljenku Huzaku na kvalitetnoj i stručnoj pomoći.*

# Sadržaj

# Uvod

Diplomski rad se sastoji od 8 poglavlja u kojima obrađujemo temu iz područja aktuarske matematike - višestruko životno osiguranje.

U prvom poglavlju objašnjeni su osnovni aktuarski pojmovi kao što su financijske rente i buduće trajanje života. Poglavlja 2 i 3 nadovezuju se na prvo poglavlje i obuhvaćaju osnove životnog osiguranja i vrste životnih renti. U poglavljima 4 i 5 uvodimo pojmove neto premija i neto premijska rezerva, tj. pričuva.
Matematički model koji se proširuje na višestruko smanjenje pri čemu postoje različiti uzroci prekida ugovora (npr. invaliditet i smrt) promatran je u šestom poglavlju.

Cijeli diplomski rad posvećen je višestrukom životnom osiguranju koje je obrađeno u sedmom poglavlju. U tom poglavlju promatraju se osiguranja kod kojih su pogodnosti uvjetovane sa više od jednog života, primjerice mirovine za udovice i siročad. Objašnjena su zajednička stanja više osoba poput stanja združenih osoba, stanja posljednjeg preživjelog i općeg simetričnog stanja. Dokazana je Schuette-Nesbittova formula, generalizacija načela isključivanja i uključivanja koja je ime dobila po Donaldu R. Schuetteu i Cecilu J. Nesbittu. Na kraju su objašnjene asimetrične rente i asimetrična osiguranja.
U zadnjem poglavlju izračunato je nekoliko zadataka vezanih za sadržaj sedmog poglavlja.

Sve formule navedene u diplomskom radu preuzete su iz knjige Hans U. Gerber, (1997), *Life Insurance Mathematics*, Springer.

# Poglavlje 1

# Osnovni aktuarski pojmovi

## 1.1 Financijske rente

U ovom poglavlju predstavljamo određene tipove *beskonačnih* ili *vječnih renti* i *konačnih renti* te računamo njihove sadašnje vrijednosti.

Definirajmo prvo neke osnovne pojmove i veze među njima. Neka je $i$ *efektivna kamatna stopa*, $v := \frac{1}{1+i}$ *faktor diskontiranja*, a $d := 1 - v$ *efektivna diskontna kamatna stopa po jedinici vremena* gdje je jedinica vremena godina.

Promotrimo sada tok novca kod kojeg se isplaćuje iznos 1. Ako se prva isplata iznosa 1 vrši u trenutku $t = 0$, takvu rentu nazivamo *prenumerando* ili *plativa unaprijed*. Sadašnja vrijednost beskonačne prenumerando jedinične rente je

$$\ddot{a}_{\overline{\infty|}} = 1 + v + v^2 + ... = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}. \tag{1.1.1}$$

Ako je prva isplata iznosa 1 izvršena na kraju prve godine, tj. u trenutku $t = 1$, takvu rentu nazivamo *postnumerando* ili *plativa unatrag*. Sadašnja vrijednost beskonačne postnumerando jedinične rente je

$$a_{\overline{\infty|}} = v + v^2 + ... = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}. \tag{1.1.2}$$

Razmotrimo sada beskonačne rente gdje se isplate od $\frac{1}{m}$ izvršavaju $m$ puta svake godine. Ako se plaćanja vrše unaprijed, sadašnju vrijednost beskonačne prenumerando rente označavamo sa $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty|}}$ i vrijedi

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + ... = \frac{1}{m}\frac{1}{1-v^{\frac{1}{m}}} =: \frac{1}{d^{(m)}}. \tag{1.1.3}$$

Ako se plaćanja vrše unatrag, sadašnju vrijednost beskonačne postnumerando rente označavamo sa $a^{(m)}_{\overline{\infty}|}$ i vrijedi

$$a^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + ... = \frac{1}{m}\frac{v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1]} =: \frac{1}{i^{(m)}} \tag{1.1.4}$$

gdje je $i^{(m)}$ nominalna kamatna stopa koja se pripisuje $m$ puta godišnje ekvivalentna godišnjoj kamatnoj stopi $i$.

Kako se prenumerando i postnumerando beskonačna renta razlikuju samo za isplatu $\frac{1}{m}$ u vremenu 0, njihove sadašnje vrijednosti također se razlikuju za $\frac{1}{m}$.

Promotrimo sada rentu koja se isplaćuje neprekidno po fiksnoj godišnjoj stopi $i$ i počinje u trenutku $t = 0$. Njezina sadašnja vrijednost označena je sa $\bar{a}_{\overline{\infty}|}$ i dana formulom

$$\bar{a}_{\overline{\infty}|} = \int_0^\infty e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta} \tag{1.1.5}$$

gdje je

$$\delta := \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \log(1+i) \tag{1.1.6}$$

*intenzitet kamate* koji je ekvivalentan $i$.

Isti rezultat mogli smo dobiti puštanjem $m \to \infty$ u formuli (1.1.3).

U praksi se konačne rente susreću češće nego beskonačne rente. *Konačne rente* definiramo kao slijed plaćanja ograničenog trajanja koje označavamo sa $n$ godina.
Ako se isplate iznosa 1 vrše u trenutcima $0, 1, 2, .., n-1$, takvu rentu zovemo *prenumerando*.
Sadašnja vrijednost konačne prenumerando rente dana je s

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + ... + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d}. \tag{1.1.7}$$

Ako se isplate iznosa 1 vrše u trenutcima $1, 2, .., n$, takvu rentu zovemo *postnumerando*.
Sadašnja vrijednost konačne postnumerando rente dana je s

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + ... + v^n = \frac{1 - v^n}{i}. \tag{1.1.8}$$

U trenutku zadnje isplate konačna postnumerando renta ima vrijednost

$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + ... + (1+i) + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \tag{1.1.9}$$

a konačna prenumerando renta

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n + ... + (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{d}. \tag{1.1.10}$$

Ove vrijednosti zovu se i *akumulacije financijskih renti*.

Slično, sadašnja vrijednost konačne postnumerando rente kod koje se isplate od $\frac{1}{m}$ vrše $m$ puta godišnje je

$$a^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i^{(m)}}, \tag{1.1.11}$$

a sadašnja vrijednost takve konačne prenumerando rente je

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d^{(m)}}. \tag{1.1.12}$$

Akumulacija konačne postnumerando rente kod koje se isplate od $\frac{1}{m}$ vrše $m$ puta godišnje je

$$s^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}}, \tag{1.1.13}$$

a akumulacija takve konačne prenumerando rente je

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}}. \tag{1.1.14}$$

## 1.2 Buduće trajanje života

### Model

Razmotrimo sada osobu koja je stara $x$ godina, što se također naziva *životna dob x*. Njezino buduće trajanje života označavamo sa $T_x$. Stoga će $x + T_x$ označavati dob osobe u trenutku smrti.
Buduće trajanje života $T_x$ je slučajna varijabla sa funkcijom distribucije

$$G_x(t) = \mathbb{P}(T_x \leq t), t \geq 0. \tag{1.2.1}$$

Funkcija $G_x(t)$ predstavlja vjerojatnost da će osoba umrijeti unutar $t$ godina za proizvoljan fiksni $t$. Pretpostavljamo da nam je distribucija $G_x$ poznata, da je neprekidna te da ima gustoću vjerojatnosti $g(t)$. Pišemo

$$\mathbb{P}(t < T_x < t+h) = \int_t^{t+h} g(s)\, ds\,. \tag{1.2.2}$$

Vjerojatnost da će osoba $(x)$ umrijeti unutar $t$ godina označava se sa ${}_tq_x$ te vrijedi

$$ {}_tq_x = G_x(t). \tag{1.2.3}$$

Slično,

$$ {}_tp_x = 1 - G_x(t) \tag{1.2.4}$$

označava vjerojatnost da će osoba $(x)$ doživjeti još najmanje $t$ godina. Još jedan simbol koji se često koristi je

$$ {}_{s|t}q_x := \mathbb{P}(s < T_x \leq s + t) = G_x(s + t) - G_x(s) = {}_{s+t}q_x - {}_sq_x \tag{1.2.5}$$

koji označava vjerojatnost da će osoba $(x)$ preživjeti sljedećih $s$ godina i nakon toga umrijeti unutar dodatnih $t$ godina.
Sa ${}_tp_{x+s}$ označavmo uvjetnu vjerojatnost da će osoba preživjeti idućih $t$ godina nakon što je doživjela dob $x + s$. Stoga vrijedi

$$ {}_tp_{x+s} = \mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s) = \frac{1 - G_x(s + t)}{1 - G_x(s)}. \tag{1.2.6}$$

Slično,

$$ {}_tq_{x+s} = \mathbb{P}(T_x \leq s + t | T_x > s) = \frac{G_x(s + t) - G_x(s)}{1 - G_x(s)} \tag{1.2.7}$$

što označava uvjetnu vjerojatnost umiranja kroz idućih $t$ godina, uzimajući da je osoba $(x)$ doživjela dob $x + s$.
Očekivana preostala duljina života osobe $(x)$ je $\mathbb{E}[T_x]$ što označavamo sa $\mathring{e}_x$. Vrijedi

$$ \mathring{e}_x = \int_0^\infty t\,g(t)dt = \int_0^\infty [1 - G_x(t)]dt = \int_0^\infty {}_tp_x\,dt. \tag{1.2.8}$$

Ako je $t = 1$, onda se kod navedenih simbola $t$ izostavlja pa npr. $q_x$ predstavlja vjerojatnost umiranja kroz jednu godinu, a ${}_{s|}q_x$ vjerojatnost preživljavanja idućih $s$ godina te zatim umiranja kroz jednu godinu.

## Intenzitet hazarda

*Intenzitet hazarda* ili *intenzitet smrtnosti* osobe $(x)$ u životnoj dobi $x + t$ definiran je kao

$$ \mu_{x+t} := \frac{g(t)}{1 - G_x(t)} = -\frac{d}{dt}\log[1 - G_x(t)]. \tag{1.2.9}$$

Odavde slijedi izraz za gustoću $g$:

$$g(t) = \mu_{x+t}(1 - G_x(t)) = \mu_{x+t}\, {}_tp_x. \tag{1.2.10}$$

Sada očekivano buduće trajanje života možemo napisati kao

$$\overset{\circ}{e}_x = \int_0^{\infty} t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t} dt. \tag{1.2.11}$$

Intenzitet smrtnosti također se može zapisati kao

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \log\, {}_tp_x. \tag{1.2.12}$$

## Analitička distribucija od $T_x$

Funkciju $G_x$ nazivamo *analitička* ili *matematička distribucija vjerojatnosti* ako se može prikazati jednostavnom formulom. Prednost analitičke formule je da se $G_x(t)$ može brzo izračunati iz malog broja parametara. Statističko zaključivanje olakšano je ako se treba procijeniti samo nekoliko parametara što može biti važan faktor ako se raspolaže malim brojem podataka. Također, analitičke formule imaju neka privlačna teorijska svojstva. U nastavku navodimo neke primjere analitičkih distribucija.

*De Moivre* je postavio hipotezu o postojanju maksimalne dobi $\omega$ za ljude i pretpostavio da je $T_x$ uniformno distribuirana između dobi 0 i $\omega - x$ što vodi do gustoće $g(t) = \frac{1}{\omega - x}$ za $0 < t < \omega - x$.
Intenzitet smrtnosti tada postaje

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega - x - t}, 0 < t < \omega - x, \tag{1.2.13}$$

što je rastuća funkcija od $t$.

*Gompertz* je postavio hipotezu da intenzitet smrtnosti ima eksponencijalni rast,

$$\mu_{x+t} = Be^{x+t}, t > 0 \tag{1.2.14}$$

što odražava proces starenja bolje od De Moivreovog zakona i uklanja pretpostavku o maksimalnoj dobi $\omega$.

*Makeham* je generalizirao navedeni zakon i postavio hipotezu

$$\mu_{x+t} = A + Be^{x+t}, t > 0 \tag{1.2.15}$$

gdje je $A > 0$ konstanta neovisna o dobi.

*Weibull* je predložio da intenzitet smrtnosti raste kao potencija od $t$, umjesto da raste eksponencijalno:

$$\mu_{x+t} = k(x+t)^n, \tag{1.2.16}$$

sa fiksnim parametrima $k > 0$ i $n > 0$.

## Cjelobrojno buduće trajanje života

Definirajmo slučajne varijable $K_x$ i $S_x$ usko povezane sa slučajnom varijablom $T_x$. Definirajmo $K_x = [T_x]$, broj budućih cjelobrojnih godina koje doživi osoba $(x)$, tj. *cjelobrojno buduće trajanje života*. Vjerojatnosna distribucija ove cjelobrojne slučajne varijable je

$$\mathbb{P}(K_x = k) = \mathbb{P}(k \leq T_x < k+1) = {}_kp_x\, q_{x+k},\ k = 0, 1, 2... \tag{1.2.17}$$

Očekivanu vrijednost od $K_x$ zovemo *očekivano cjelobrojno buduće trajanje života* i označavamo sa $e_x$. Stoga vrijedi

$$e_x = \mathbb{E}[K_x] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}(K_x = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,{}_kp_x\, q_{x+k} \tag{1.2.18}$$

ili

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(K_x \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x. \tag{1.2.19}$$

Neka je $S_x$ dio godine u kojem osoba $(x)$ živi u godini smrti, dakle

$$T_x = K_x + S_x. \tag{1.2.20}$$

Pretpostavimo da su $K_x$ i $S_x$ nezavisne slučajne varijable. Tada je uvjetna distribucija od $S_x$ uz dano $K_x$ nezavisna od $K_x$. Uvijek vrijedi

$$\mathbb{P}(S_x \leq u | K_x = k) = \frac{{}_uq_{x+k}}{q_{x+k}}. \tag{1.2.21}$$

Budući da to, po pretpostavci, ne ovisi o argumentu $k$, možemo pisati

$${}_uq_{x+k} = H(u)\, q_{x+k} \tag{1.2.22}$$

za $k = 0, 1, .., 0 \leq u \leq 1$ i neku funkciju $H(u)$.

## Tablice smrtnosti

U prethodnim odjeljcima razmatrali smo osobu u dobi $x$. Vjerojatnosna distribucija njezinog budućeg trajanja života može se opisati pomoću tablica smrtnosti.

*Tablice smrtnosti* su tablice vjerojatnosti smrti unutar jedne godine $q_x$ u cjelobrojnim pristupnim dobima $x$.

Tablice smrtnosti konstruirane su za određene grupe populacija koje su podijeljene prema raznim faktorima poput spola, rase, generacije ili tipa osiguranja. Početna dob $x$ može imati značajan utjecaj u tablicama smrtnosti. Neka $x$ označava dob kada osoba kupi životno osiguranje. Kako je osiguranje ponuđeno samo osobama dobrog zdravlja, razumno je očekivati da će osoba koja je upravo kupila osiguranje biti boljeg zdravlja od osobe koja je kupila osiguranje prije nekoliko godina, uzimajući u obzir da su ostali čimbenici (posebno dob) jednaki. Takve se tablice zovu *selektirane tablice* ili *tablice s odabirom*. Vjerojatnosti u tim tablicama se ocjenjuju prema dobi pri ulasku. Stoga $q_{[x]+t}$ označava vjerojatnost smrti unutar jedne godine za osobu $(x+t)$ koja je bila dobi $x$ pri ulasku u grupu osiguranika. Selekcija vodi do sljedećih nejednakosti

$$q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_{[x-2]+2} < ... \tag{1.2.23}$$

Efekt selekcije obično izblijedi nakon nekoliko godina, recimo $r$ godina nakon ulaska. Pretpostavljamo da vrijedi

$$q_{[x-r]+r} = q_{[x-r-1]+r+1} = q_{[x-r-2]+r+2} = ... = q_x. \tag{1.2.24}$$

Period $r$ zovemo *razdoblje selekcije* ili *razdoblje odabira*, a tablicu koja se koristi nakon što razdoblje selekcije istekne *ultimativna* ili *krajnja tablica*.

## Vjerojatnost smrti u dijelovima godina

Iz tablica smrtnosti možemo odrediti zakon razdiobe slučajne varijeble $K_x$. Vrijedi

$$_kp_x = p_x p_{x+1} ... p_{x+k-1}, \; k = 1, 2, ... \tag{1.2.25}$$

Razdioba slučajne varijable $T_x$ može se dobiti interpolacijom uz dodatne pretpostavke o $_uq_x$, odnosno $\mu_{x+u}$. Za $x \in \mathbb{N}_0$ i $0 < u < 1$ razmatramo sljedeće tri pretpostavke:

a) linearnost funkcije $_uq_x$ po $u$, tj.

$$_uq_x = u\, q_x\,. \tag{1.2.26}$$

To je slučaj kada su $K_x$ i $S_x$ nezavisne slučajne varijable i $S_x$ je uniformno distribuirana na $(0,1)$. Vrijedi

$$ {}_u p_x = 1 - u\, q_x, \tag{1.2.27}$$

a iz (1.2.12) slijedi

$$ \mu_{x+u} = \frac{q_x}{1 - u\, q_x}. \tag{1.2.28}$$

b) Intenzitet smrtnosti $\mu_{x+u}$ je konstantan na $[x, x+1]$, tj. $\mu_{x+u} = c$.

Pretpostavljamo da je intenzitet smrtnosti tokom godine jednak nekoj konstanti $\mu_{x+\frac{1}{2}}$. Koristeći (1.2.12) slijedi

$$ \mu_{x+\frac{1}{2}} = -\log\, p_x \tag{1.2.29}$$

i

$$ {}_u p_x = e^{-u\mu_{x+\frac{1}{2}}}. \tag{1.2.30}$$

U ovom slučaju $K_x$ i $S_x$ nisu nezavisne.

c) Funkcija ${}_{1-u}q_{x+u}$ je linearna po $1-u$.
Dakle,

$$ {}_{1-u}q_{x+u} = (1-u)\, q_x. \tag{1.2.31}$$

Ova pretpostavka poznata je pod nazivom *Balduccijeva pretpostavka*. To vodi k

$$ {}_u p_x = \frac{p_x}{{}_{1-u}p_{x+u}} = \frac{1 - q_x}{1 - (1-u) q_x}. \tag{1.2.32}$$

Iz (1.2.12) dobivamo

$$ \mu_{x+u} = \frac{q_x}{1 - (1-u) q_x}. \tag{1.2.33}$$

U ovom slučaju $K_x$ i $S_x$ također nisu nezavisne.

# Poglavlje 2

# Osnove životnog osiguranja

Sa $Z$ označimo sadašnju vrijednost isplate po nekom ugovoru životnog osiguranja, a sa $\mathbb{E}[Z]$ očekivanu sadašnju vrijednost isplate koju nazivamo i *jednokratna neto premija*. $\mathbb{E}[Z]$ ne opisuje rizik koji prihvaća osiguravatelj, za to bi trebalo znati nešto više o razdiobi slučajne varijable $Z$. Rizik se najčešće mjeri preko varijance.

## 2.1 Jednostavni tipovi osiguranja

*Osiguranje života* je ugovor koji obvezuje osiguravatelja na isplatu iznosa 1 na kraju godine smrti. Iznos isplate je fiksan, dok je vrijeme isplate $(K_x + 1)$ slučajno. Sadašnja vrijednost isplate je

$$Z = v^{K_x+1}. \tag{2.1.1}$$

Jednokratnu neto premiju označavamo sa $A_x$ i vrijedi

$$A_x = \mathbb{E}[v^{K_x+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_k p_x \, q_{x+k}. \tag{2.1.2}$$

*Osiguranje života na rok od n godina* je ugovor koji obvezuje osiguravatelja na isplatu iznosa 1, ali samo u slučaju da se smrt dogodi u prvih $n$ godina od potpisivanja ugovora. Dakle, vrijeme isplate je na kraju godine smrti. Sadašnja vrijednost isplate je

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1} & \text{za } K_x = 0, 1, ...n-1, \\ 0 & \text{za } K_x = n, n+1, n+2, ..., \end{cases} \tag{2.1.3}$$

a jednokratna neto premija

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, {}_k p_x \, q_{x+k}. \tag{2.1.4}$$

*Osiguranje za slučaj doživljenja* je ugovor koji ima rok od $n$ godina i isplaćuje iznos 1, ali samo u slučaju doživljenja. Sadašnja vrijednost isplate je

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{za } K_x = 0, 1, ...n-1, \\ v^n & \text{za } K_x = n, n+1, n+2, ..., \end{cases} \tag{2.1.5}$$

a jednokratna neto premija

$$A_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}} = v^n \, {}_n p_x. \tag{2.1.6}$$

*Mješovito osiguranje* ili *osiguranje za slučaj smrti i doživljenja* je ugovor koji je samo suma prethodna dva. On osigurava iznos 1 na kraju godine smrti ukoliko se ona dogodi u prvih $n$ godina, u suprotnom se isti iznos isplaćuje na kraju $n$-te godine po doživljenju. Sadašnja vrijednost isplate je

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1} & \text{za } K_x = 0, 1, ...n-1, \\ v^n & \text{za } K_x = n, n+1, n+2, ... \end{cases} \tag{2.1.7}$$

Označimo li (2.1.3) sa $Z_1$, a (2.1.5) sa $Z_2$, slijedi da je vrijednost tog osiguranja zbroj vrijednosti osiguranja života na rok od $n$ godina i osiguranja za slučaj doživljenja, tj.

$$Z = Z_1 + Z_2. \tag{2.1.8}$$

Dakle, jednokratna neto premija je

$$A_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}[Z] = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}}. \tag{2.1.9}$$

*Odgođeno osiguranje života za m godina* ima sadašnju vrijednost jedinične isplate

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{za } K_x = 0, 1, ...m-1, \\ v^{K_x+1} & \text{za } K_x = m, m+1, m+2, ..., \end{cases} \tag{2.1.10}$$

pa je jednokratna neto premija

$${}_{m|}A_x = \mathbb{E}[Z] = {}_m p_x v^m A_{x+m} = A_x - A^1_{x:\overline{m}|}. \tag{2.1.11}$$

## 2.2 Osiguranje plativo u trenutku smrti

U prethodnom odjeljku smo prepostavili da se isplata vrši na kraju godine smrti što ne odražava praksu osiguranja na realan način, ali prednost te pretpostavke je da se formule mogu izraziti direktno iz tablica smrtnosti.
Sada pretpostavljamo da se isplata iznosa 1 vrši u trenutku smrti, tj. u trenutko $T_x$. Takav ugovor nazivamo *osiguranje plativo u trenutku smrti*. Sadašnja vrijednost isplate je

$$Z = v^{T_x}, \tag{2.2.1}$$

a jednokratna neto premija

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} dt. \tag{2.2.2}$$

Ovu vrijednost nije moguće izračunati na osnovi tablica smrtnosti bez dodatnih prepostavki. Ako prihvatimo pretpostavku a) iz prethodnog poglavlja i $T_x$ zapišemo kao

$$T_x = K_x + S_x = (K_x + 1) - (1 - S_x), \tag{2.2.3}$$

tada su $K_x$ i $S_x$ nezavisne i $S_x$ ima uniformnu razdiobu na intervalu $[0, 1)$ pa slijedi

$$\bar{A}_x \approx \frac{i}{\delta} A_x. \tag{2.2.4}$$

## 2.3 Općeniti tipovi životnog osiguranja

Pretpostavimo da se osigurana svota mijenja iz godine u godinu i da se plaća na kraju godine smrti. Neka je $c_j$ osigurana svota u $j$-toj godini nakon zaključenja police. Vrijednost police je

$$Z = c_{K_x+1} v^{K_x+1}. \tag{2.3.1}$$

Jednokratna neto premija i viši momenti se jednostavno računaju:

$$\mathbb{E}[Z^h] = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}^h v^{h(k+1)} \, {}_kp_x \, q_{x+k}. \tag{2.3.2}$$

Ovo osiguranje može se prikazati kao kombinacija odgođenih osiguranja života od kojih svako ima konstantnu osiguranu svotu. Dakle, jednokratnu neto premiju možemo naći kao:

$$\mathbb{E}[Z] = c_1 A_x + (c_2 - c_1) \, {}_{1|}A_x + (c_3 - c_2) \, {}_{2|}A_x + .... \tag{2.3.3}$$

Ukoliko se osiguranje plaća odmah nakon smrti, osigurana svota se općenito zadaje proizvoljnom funkcijom $c(t)$, $t \geq 0$. Takav ugovor zapisujemo kao $C = ((T_x, c(T_x)))$, a sadašnja vrijednost mu je

$$Z = c(T_x)v^{T_x}. \tag{2.3.4}$$

Jednokratna neto premija iznosi

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^\infty c(t)\, v^t\, {}_t p_x \mu_{x+t}\, dt\,. \tag{2.3.5}$$

# Poglavlje 3

# Životne rente

*Životna renta* je tok novca kojeg čini niz periodičnih isplata za vrijeme trajanja života osobe. Iznosi su tipično unaprijed određeni, no broj isplata je slučajan pa je vrijednost rente slučajna varijabla koju označavamo sa $Y$. Njeno očekivanje smatramo ”fair cijenom”, tj. jednokratnom neto premijom. Životnu rentu možemo gledati i s obrnutim predznakom. Tada ona opisuje periodične uplate.

## 3.1 Jednostavne životne rente

*Prenumerando životna renta* ima sadašnju vrijednost

$$Y = 1 + v + v^2 + ... + v^{K_x} = \ddot{a}_{\overline{K_x + 1}|}, \tag{3.1.1}$$

a jednokratna neto premija je

$$\ddot{a}_x = \mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k + 1}|}\, {}_kp_x\, q_{x+k}\,. \tag{3.1.2}$$

Vrijedi jednakost

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d}. \tag{3.1.3}$$

Ova jednakost transformira se u

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x. \tag{3.1.4}$$

*Postnumerando životna renta* ima sadašnju vrijednost

$$Y = v + v^2 + ... + v^{K_x} = a_{\overline{K_x}|}, \tag{3.1.5}$$

a jednokratna neto premija je

$$a_x = \mathbb{E}[Y] = \ddot{a}_x - 1 = \frac{1 - A_x}{d} - 1. \tag{3.1.6}$$

Vrijedi jednakost

$$1 = i\,a_x + (1+i)A_x. \tag{3.1.7}$$

*Prenumerando životna renta s ograničenim trajanjem* ima sadašnju vrijednost

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} & \text{za } K_x = 0, 1, ...n-1, \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{za } K_x = n, n+1, n+2, ..., \end{cases} \tag{3.1.8}$$

a jednokratna neto premija je

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\,{}_kp_x\,q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\,{}_kp_x. \tag{3.1.9}$$

Vrijedi jednakost

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}, \tag{3.1.10}$$

tj.

$$1 = d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}. \tag{3.1.11}$$

*Prenumerando životna renta s odgodom od m godina* ima sadašnju vrijednost

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{za } K_x = 0, 1, ...m-1, \\ v^m + v^{m+1} + ... + v^{K_x} & \text{za } K_x = m, m+1, m+2, ..., \end{cases} \tag{3.1.12}$$

a jednokratna neto premija je

$${}_{m|}\ddot{a}_x = {}_mp_x\,v^m\,\ddot{a}_{x+m} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}. \tag{3.1.13}$$

## 3.2 Životne rente plative više puta godišnje

U ovom odjeljku pretpostavljamo da se isplate iznosa $\frac{1}{m}$ isplaćuju $m$ puta godišnje u jednakim vremenskim razmacima. Ako je renta npr. prenumerando, isplate se vrše u trenucima $0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}$ sve dok je korisnik rente živ. Uz pretpostavku a) iz prvog poglavlja, jednokratna neto premija ovakve rente je

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}}, \tag{3.2.1}$$

tj. vrijedi jednakost

$$1 = d^{(m)}\,\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}. \tag{3.2.2}$$

## 3.3 Varijabilne životne rente

Promotrimo sada *varijabilne* ili *promjenjive životne rente*. Periodične isplate iznosa $r_0, r_1, ...$ vrše se u vremenskim trenutcima $0, 1, ..., K_x$. Sadašnja vrijednost ovakve rente je

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k r_k I_{\{K_x \geq k\}}, \tag{3.3.1}$$

a jednokratna neto premija

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} v^k r_k\, {}_k p_x. \tag{3.3.2}$$

Sada razmatramo neprekidne životne rente. Kod ovakvih renti isplata iznosa $r(t)$ vrši se u trenutku $t$. Sadašnja vrijednost je

$$Y = \int_0^T v^t r(t) dt, \tag{3.3.3}$$

a jednokratna neto premija

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty v^t r(t)\, {}_t p_x dt. \tag{3.3.4}$$

# Poglavlje 4

# Neto premije

Polica osiguranja s jedne strane određuje naknade koje plaća osiguravatelj, a s druge strane premije koje plaća osiguranik. Sve premije o kojima smo do sada govorili bile su jednokratne neto premije. Iznosile su $\mathbb{E}[Z]$ gdje je $Z$ bila sadašnja vrijednost svih isplata osiguraniku (uz pretpostavku da je ovo očekivanje konačno). Ovakve premije se plaćaju unaprijed i odjednom, no premije se ne plaćaju uvijek na taj način. Premije se tipično plaćaju u pravilnim vremenskim razmacima i gotovo uvijek unaprijed, tj. prenumerando. Najčešći načini plaćanja premije su:

- jednokratna neto premija
- periodične premije u konstantnom iznosu
- periodične premije u varijabilnom iznosu.

Za periodične premije potrebno je, uz iznose premija, odrediti i trajanje i učestalost plaćanja premije. U načelu se ovakve premije plaćaju unaprijed.
Označimo sa $L_x$ gubitak osiguravatelja u odnosu na policu osiguranja, tj. $L_x$ je razlika sadašnje vrijednosti svih budućih isplata i sadašnje vrijednosti svih budućih uplata. Negativni gubitak je dobitak za osiguravatelja.
Premija se naziva *neto premija* ako je

$$\mathbb{E}[L_x] = 0. \tag{4.1}$$

## 4.1 Neto premije za jednostavne tipove osiguranja

Promatramo *osiguranje života* kod kojeg je osigurani iznos 1 plativ na kraju godine smrti. Premija se plaća godišnje unaprijed u konstantnom iznosu dokle god je osiguranik $(x)$ živ. Odredimo njen iznos $P_x$. Gubitak osiguravatelja je

$$L_x = v^{K_x+1} - P_x\,\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}. \tag{4.1.1}$$

Iz (4.1) odmah slijedi

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}. \tag{4.1.2}$$

Gubitak možemo alternativno zapisati kao

$$L_x = (1 + \frac{P_x}{d})\,v^{K_x+1} - \frac{P_x}{d}. \tag{4.1.3}$$

Stoga vrijedi

$$\mathbb{V}ar[L_x] = (1 + \frac{P_x}{d})^2\,\mathbb{V}ar[v^{K_x+1}]. \tag{4.1.4}$$

Ova formula pokazuje da je rizik za osiguravatelja, iskazan varijancom, veći ako se premije plaćaju godišnje nego kada se premije plaćaju jednokratno.
Podijelimo li jednadžbu (3.1.4) sa $\ddot{a}_x$ i koristeći formulu (4.1.2) dobivamo

$$\frac{1}{\ddot{a}_x} = d + P_x. \tag{4.1.5}$$

Ovaj identitet ima sljedeću interpretaciju: dug iznosa 1 možemo vratiti godišnjim plaćanjem unaprijed iznosa $\frac{1}{\ddot{a}}$. Alternativno, možemo platiti kamatu unaprijed svake godine, a iznos 1 platiti u trenutku $K_x + 1$.

*Životno osiguranje s ograničenim trajanjem* daje gubitak

$$L_x = \begin{cases} v^{K_x+1} - P^1_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} & \text{za } K_x = 0, 1, ...n-1, \\ -P^1_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{za } K_x \geq n \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Neto godišnja premija je

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. \tag{4.1.7}$$

Gubitak osiguravatelja u *osiguranju doživljenja* s osiguranim iznosom 1 i trajanjem od $n$ godina je

$$L_x = \begin{cases} -P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\,\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} & \text{za } K_x = 0, 1, ...n-1, \\ v^n - P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\,\ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{za } K_x \geq n \end{cases} \tag{4.1.8}$$

Neto godišnja premija je

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{4.1.9}$$

Kod *mješovitog osiguranja* neto godišnju premiju dobivamo kao

$$P_{x:\overline{n}|} = P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. \tag{4.1.10}$$

Vrijede jednakosti

$$\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = d + P_{x:\overline{n}|}, \tag{4.1.11}$$

$$P_{x:\overline{n}|} = d\,A_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}\,A_{x:\overline{n}|}. \tag{4.1.12}$$

*Općeniti tip osiguranja* je kada se osigurana svota mijenja iz godine u godinu. Neka je $c_j$ osigurana svota u $j$-toj godini nakon zaključenja police. Pretpostavljamo da se osiguravatelj financira godišnjim premijama $\Pi_0, \Pi_1, ..., \Pi_k$. Osiguravateljev gubitak za ovu premiju je

$$L_x = c_{K_x+1}\,v^{K_x+1} - \sum_{k=0}^{K_x} \Pi_k\,v^k. \tag{4.1.13}$$

# Poglavlje 5

# Neto premijska rezerva

Promotrimo policu osiguranja koja je financirana neto premijom. U trenutku izdavanja police, očekivana sadašnja vrijednost budućih premija jednaka je očekivanoj sadašnjoj vrijednosti budućih koristi od plaćanja, čineći očekivani gubitak osiguravatelja jednak 0.

Ova jednakost između budućih plaćanja i budućih koristi općenito ne postoji u kasnijim trenutcima. Stoga definiramo slučajnu varijablu ${}_tL_x$ kao razliku između sadašnje vrijednosti (u trenutku $t$) budućih koristi od plaćanja i sadašnje vrijednosti budućih plaćanja premije. ${}_tL_x$ je vrijednost preostalog gubitka za osiguravatelja. Pretpostavljamo da ${}_tL_x$ nije identički jednak nuli i da je $T_x > t$.

*Neto premijska rezerva* u trenutku $t$ označava se sa ${}_tV_x$ i definira se kao uvjetno očekivanje od ${}_tL_x$ uz dano $T_x > t$, tj.

$$ {}_tV_x = \mathbb{E}[{}_tL_x | T_x > t]. \tag{5.1} $$

Police životnog osiguranja obično su dizajnirane tako da je neto premijska rezerva pozitivna, ili barem nenegativna. Dakle, police obično imaju svojstvo da je ${}_tV_x > 0$ nakon nekog vremena $t_0$, što znači da vrijednost police, tj. očekivani gubitak za osiguravatelja na početku raste. To je posljedica činjenice da se premije plaćaju i prije nego se isplaćuju naknade što osiguranicima daje motivaciju da ne raskidaju policu. Dakle, osiguravatelj mora čuvati (rezervirati i reinvestirati) premije skupljene u prošlosti kako bi osigurao isplate koje tek dolaze na naplatu. Osiguravatelj koji to ne bi činio mogao bi se naći u situaciji da ne može isplatiti ugovoreni iznos.

## 5.1 Neto premijska rezerva osiguranja života

Vratimo se na osiguranje života upoznato u poglavlju 4. Njegova neto premijska rezerva na kraju $k$-te godine označava se sa ${}_kV_x$ i po definiciji je jednaka

$$ {}_kV_x = A_{x+k} - P_x\,\ddot{a}_{x+k}. \tag{5.1.1} $$

Izvest ćemo neke alternativne formule.

Zamjenom $A_{x+k}$ sa $1 - d\,\ddot{a}_{x+k}$ dobivamo

$$ {}_kV_x = 1 - (P_x + d)\,\ddot{a}_{x+k}. \tag{5.1.2} $$

Zamjenom $P_x + d$ sa $\frac{1}{\ddot{a}_x}$ dobivamo

$$ {}_kV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}. \tag{5.1.3} $$

Formulu

$$ {}_kV_x = \frac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x}. \tag{5.1.4} $$

dobivamo zamjenom $\ddot{a}_x$ sa $(1 - A_x)/d$ i $\ddot{a}_{x+k}$ sa $(1 - A_{x+k})/d$. Identitet $P_{x+k}\,\ddot{a}_{x+k} = A_{x+k}$ daje

$$ {}_kV_x = (1 - \frac{P_x}{P_{x+k}})\,A_{x+k} \tag{5.1.5} $$

i

$$ {}_kV_x = (P_{x+k} - P_x)\,\ddot{a}_{x+k}. \tag{5.1.6} $$

Na kraju zamijenimo $\ddot{a}_{x+k}$ sa $1/(P_{x+k} + d)$ i dobijemo

$$ {}_kV_x = \frac{P_{x+k} - P_x}{P_{x+k} + d}. \tag{5.1.7} $$

Niz ovako različitih formula može se činiti zbunjujućim. No ove formule su vrlo važne jer se lako interpretiraju i lako se mogu generalizirati na druge tipove osiguranja. Formula (5.1.2) pokazuje da je neto premijska rezerva jednaka osiguranoj sumi umanjenoj za očekivanu sadašnju vrijednost budućih premija i neiskorištenih kamata. To nas podsjeća na identitet $A_x = 1 - d\,\ddot{a}_x$ koji ima sličnu interpretaciju.
U doživotnom osiguranju života osobe dobi $x+k$ jednokratna neto premija je $P_{x+k}$. Formulu (5.1.6) zovemo *formula diferencije premija*.

## 5.2 Neto premijske rezerve kod necjelobrojnog trajanja

Vraćamo se na općeniti tip osiguranja upoznat u poglavlju 4. Pretpostavimo da je osoba živa u trenutku $k+u$ gdje je $k$ cijeli broj te $0 < u < 1$. Označimo neto premijsku rezervu sa ${}_{k+u}V_x$. Neto premijsku rezervu možemo izraziti kao

$$ {}_{k+u}V_x = {}_{k+1}V_x\, v^{1-u} + (c_{k+1} - {}_{k+1}V_x)\, v^{1-u}\, {}_{1-u}q_{x+k+u} \tag{5.2.1} $$

gdje je $c_{k+1}$ očekivana sadašnja vrijednost sredstava na kraju godine u slučaju smrti. Pretpostavka a) iz poglavlja 1.2. povlači

$$ {}_{1-u}q_{x+k+u} = \frac{(1-u)\, q_{x+k}}{1 - u\, q_{x+k}}, \tag{5.2.2} $$

što omogućava direktan račun ${}_{k+u}V_x$. Također, ${}_{k+u}V_x$ možemo izračunati u terminima ${}_kV_x$. Dobivamo

$$ {}_{k+u}V_x = ({}_kV_x + \Pi_k^s)(1+i)^u + \frac{1-u}{1-u\, q_{x+k}}\, \Pi_k^r (1+i)^u \tag{5.2.3} $$

gdje je $\Pi_k^s$ *štedna premija*, a $\Pi_k^r$ *premija rizika*.

Premija se može rastaviti na te dvije komponenete, tj. vrijedi $\Pi_k = \Pi_k^s + \Pi_k^r$.

Treći način izračuna ${}_{k+u}V_x$ je formula

$$ {}_{k+u}V_x = \frac{1-u}{1-u\, q_{x+k}}({}_kV_x + \Pi_k)(1+i)^u + (1 - \frac{1-u}{1-u\, q_{x+k}})\, {}_{k+1}V_x\, v^{1-u}. \tag{5.2.4} $$

## 5.3 Pridruživanje cjelobrojnog gubitka osigurateljnim godinama

Nastavljamo diskusiju o općenitom tipu osiguranja. Za $k = 0, 1, ...$ definiramo $\Lambda_k$ kao gubitak osiguravatelja tijekom $(k+1)$-e godine. Početci godina se uzimaju kao točke vremenske skale. Promatramo tri slučaja:

- osiguranik je umro prije godine $k$
- osiguranik umire tijekom $(k+1)$-e godine
- osiguranik preživljava do $k+1$.

Definiramo slučajnu varijablu $\Lambda_k$ sa

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0 & \text{za } K_x \leq k-1, \\ c_{k+1}\, v - ({}_kV_x + \Pi_k) & \text{za } K_x = k, \\ {}_{k+1}V_x\, v - ({}_kV_x + \Pi_k) & \text{za } K_x \geq k+1. \end{cases} \tag{5.3.1}$$

Zamjenom $\Pi_k$ sa $\Pi_k^s + \Pi_k^r$ dobivamo

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0 & \text{za } K_x \leq k-1, \\ -\Pi_k^r + (c_{k+1} - {}_{k+1}V)\, v & \text{za } K_x = k, \\ -\Pi_k^r & \text{za } K_x \geq k+1. \end{cases} \tag{5.3.2}$$

Stoga, ako je osiguranik živ u trenutku $k$, $\Lambda_k$ je gubitak uzrokovan jednogodišnjim osiguranjem koje pokriva neto iznos pri riziku.
Ukupan gubitak za osiguravatelja dan je jednadžbom (4.1.13). Očito je

$$L_x = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k v^k \tag{5.3.3}$$

što se može provjeriti direktno iz (5.3.1). Naravno, suma je konačna i ide od 0 do $K_x$. Koristeći (5.3.2) i (5.3.3) dobivamo

$$\mathbb{E}[\Lambda_k | K_x \geq k] = 0 \tag{5.3.4}$$

što implicira

$$\mathbb{E}[\Lambda_k] = \mathbb{E}[\Lambda_k | K_x \geq k]\, \mathbb{P}(K_x \geq k) = 0. \tag{5.3.5}$$

# Poglavlje 6

# Višestruko smanjenje

## 6.1 Model

U ovom poglavlju proširit ćemo model upoznat u poglavlju 2.3 i reinterpretirati preostalo vrijeme trajanja života, slučajnu varijablu $T_x$.
Pretpostavimo da promatramo osobu pristupne dobi $x$. Osoba napušta status opažanja u trenutku $T_x$ zbog jednog od $m$ međusobno isključivih uzroka smanjenja (numerirajmo ih redom sa $1, 2, ..., m$). Proučavat ćemo par slučajnih varijabli: preostalo vrijeme trajanja života specifičnog statusa $T_x$ i *uzrok smanjenja* $J_x$.

Klasičan primjer je osiguranje invalidnosti s inicijalnim statusom *"Aktivan"* i mogućim uzrocima smanjenja *"Invalidnost"* i *"Smrt"*. Osoba $(x)$ je pristupila statusu *"Aktivan"* u dobi $x$. $T_x$ je tada rezidualno vrijeme boravka u statusu *"Aktivan"* do izlaska iz tog statusa zbog jednog od navedena dva uzroka smanjenja.

U drugoj postavci $T_x$ je preostalo vrijeme života osobe $(x)$. Razlikujemo 2 uzroka smanjenja: smrt zbog uzroka *"Nesreća"* ili *"Drugi uzroci"*. Ovaj model je pogodan za osiguranja koja pružaju dvostruku odštetu ako je nastupila slučajna smrt.

Zajedničku distribuciju od $T_x$ i $J_x$ možemo zapisati u terminima funkcija gustoća (ne nužno vjerojatnosnih) $g_1(t)$,$g_2(t)$,...,$g_m(t)$. Vrijedi da je gustoća od $T_x$ jednaka

$$g(t) = g_1(t) + ... + g_m(t) \tag{6.1.1}$$

zbog disjunktnosti uzroka smanjenja.
Ako se smanjenje dogodilo u trenutku $t$, uvjetna vjerojatnost od $j$ kao razloga smanjenja je

$$\mathbb{P}(J_x = j | T_x = t) = \frac{g_j(t)}{g(t)}. \tag{6.1.2}$$

Uvodimo oznaku

$$
{}_tq_{j,x} = \mathbb{P}(T_x \le t, J_x = j) = \int_0^t g_j(s)\,ds \tag{6.1.3}
$$

ili općenitije

$$
\begin{aligned}
{}_tq_{j,x+s} = \mathbb{P}(T_x \le s+t, J_x = j | T_x > s) &= \frac{\mathbb{P}(s < T_x \le s+t, J_x = j)}{\mathbb{P}(T_x > s)} \\
&= \int_s^{s+t} g_j(z)\,dz / [1 - G_x(s)].
\end{aligned} \tag{6.1.4}
$$

## 6.2 Intenzitet smanjenja

Za osobu $(x)$ *intenzitet smanjenja u dobi x+t uz uzrok j* definira se kao

$$
\mu_{j,x+t} := \frac{g_j(t)}{1 - G_x(t)} = \frac{g_j(t)}{{}_tp_x}. \tag{6.2.1}
$$

Zajednički intenzitet smanjenja je tada

$$
\mu_{x+t} = \mu_{1,x+t} + ... + \mu_{m,x+t} \tag{6.2.2}
$$

što se vidi iz (6.2.1) i (1.2.9). Vrijedi

$$
\mathbb{P}(J_x = j | T_x = t) = \frac{\mu_{j,x+t}}{\mu_{x+t}}. \tag{6.2.3}
$$

Ako su svi intenziteti smanjenja poznati, zajednička distribucija od $T_x$ i $J_x$ može se izvesti prvo koristeći (6.2.2) i (1.2.12) za ukloniti ${}_tp_x$ i nakon toga uklanjanjem $g_j(t)$ iz (6.2.1).

## 6.3 Cjelobrojno vrijeme života

Ako je jednogodišnja vjerojatnost smanjenja

$$
q_{j,x+k} = \mathbb{P}(T_x \le k+1, J_x = j | T_x > k) \tag{6.3.1}
$$

poznata za $k = 0, 1, ...$ i $j = 1, ..., m$, možemo izvesti zajedničku funkciju distribucije cjelobrojnog preostalog vremena života $K_x = [T_x]$ i uzroka smanjenja $J_x$.
Uočimo da je

$$q_{x+k} = q_{1,x+k} + ... + q_{m,x+k} \tag{6.3.2}$$

iz čega se može izračunati ${}_kp_x$. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}(K_x = k, J_x = j) = {}_kp_x\, q_{j,x+k} \tag{6.3.3}$$

za $k = 0, 1, ...$ i $j = 1, ..., m$. Zajedničku distribuciju od $T_x$ i $J_x$ možemo računati pod pretpostavkom koja uključuje vjerojatnost smanjenja u necjelobrojnim godinama. Popularna pretpostavka je da je ${}_uq_{j,x+k}$ linearna funkcija od $u$ za $0 < u < 1$ i $k$ cijeli broj, tj. da vrijedi

$${}_uq_{j,x+k} = u\, q_{j,x+k}. \tag{6.3.4}$$

Ova pretpostavka povlači već navedenu pretpostavku a) koja se dobije sumacijom po svim $j$. Iz (6.3.4) slijedi

$$g_j(k+u) = {}_kp_x\, q_{j,x+k}. \tag{6.3.5}$$

Zajedno s jednakošću ${}_{k+u}p_x = {}_kp_x(1 - u\, q_{x+k})$ ovo povlači

$$\mu_{j,x+k+u} = \frac{q_{j,x+k}}{1 - u\, q_{x+k}} \tag{6.3.6}$$

Pretpostavka (6.3.4) ima očitu prednost koju smo već upoznali u prvom poglavlju, a to je nezavisnost slučajnih varijabli $S_x$ i $K_x$. $S_x$ ima uniformnu razdiobu na $(0, 1)$. Kao posljedica (6.3.4) i (6.3.6) slijedi uvjetna vjerojatnost

$$\mathbb{P}(J_x = j | K_x = k, S_x = u) = \frac{q_{j,x+k}}{q_{x+k}}. \tag{6.3.7}$$

Zadnja jednakost tvrdi da je uvjetna vjerojatnost smanjenja zbog uzroka $j$ konstantna tokom godine.
Dakle, zaključak je da $S_x$ ima uniformnu razdiobu na $(0, 1)$, neovisna je o slučajnom vektoru $(K_x, J_x)$ i distribucija od $(K_x, J_x)$ je dana sa (6.3.3).

## 6.4 Opći oblik osiguranja

Promatramo osiguranje koje osigurava isplatu iznosa $c_{j,k+1}$ na kraju $(k+1)$-e godine ako se dogodi smanjenje zbog uzroka $j$ tijekom te godine. Sadašnja vrijednost osiguranog dobitka je

$$Z = c_{J_x,K_x+1}\, v^{K_x+1}, \tag{6.4.1}$$

a jednokratna neto premija je

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k+1}\, v^{k+1}\, {}_k p_x\, q_{j,x+k}. \tag{6.4.2}$$

Ako osiguranje osigurava plaćanje u trenutku smrti, sadašnja vrijednost osiguranog dobitka je

$$Z = c_j(T_x)\, v^{T_x}, \tag{6.4.3}$$

a jednokratna neto premija

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} c_j(t)\, v^t\, g_j(t)\, dt. \tag{6.4.4}$$

Ovaj izraz možemo izračunati i numerički podjelom svakog od $m$ integrala

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{1} c_j(k+u)\, v^{k+u}\, g_j(k+u)\, du. \tag{6.4.5}$$

Pretpostavka (6.3.4) nam dopušta da supstituiramo (6.3.5) u gornji izraz. Stoga je (6.4.5) zapravo u formi (6.4.2) ako pišemo

$$c_{j,k+1} = \int_0^{1} c_j(k+u)(1+i)^{1-u} du. \tag{6.4.6}$$

U praksi često koristimo aproksimaciju

$$c_{j,k+1} \approx c_j(k+\frac{1}{2})(1+i)^{\frac{1}{2}} \tag{6.4.7}$$

koja će u većini slučajeva biti dovoljno dobra. Gore navedene formule pokazuju da se izračun jednokratne neto premije u neprekidnom modelu (6.4.3) može svesti na izračun u diskretnom modelu (6.4.1).

## 6.5 Neto premijska rezerva

Ponovno promatramo opći oblik osiguranja koji je podržan godišnjim premijama $\Pi_0, \Pi_1, \ldots$ *Neto premijska rezerva* na kraju $k$-te godine je

$${}_kV_x = \sum_{j=1}^{m} \sum_{h=0}^{\infty} c_{j,k+h+1}\, v^{h+1}\, {}_h p_{x+k}\, q_{j,x+k+h} - \sum_{h=0}^{\infty} \Pi_{k+h}\, v^h\, {}_h p_{x+k}. \tag{6.5.1}$$

Rekurzivna formula je

$$ {}_kV_x + \Pi_k = {}_{k+1}V_x\, v\, p_{x+k} + \sum_{j=1}^{m} c_{j,k+1}\, v\, q_{j,x+k}. \tag{6.5.2}$$

Može se zapisati i kao

$$ {}_kV_x + \Pi_k = {}_{k+1}V_x\, v\ + \sum_{j=1}^{m} (c_{j,k+1} - {}_{k+1}V_x)\, v\, q_{j,x+k}. \tag{6.5.3}$$

Premije sada možemo rastaviti na dvije komponente, *premiju štednje*

$$ \Pi_k^s = {}_{k+1}V_x\, v - {}_kV_x \tag{6.5.4}$$

i *riziko premiju*

$$ \Pi_k^r = \sum_{j=1}^{m} (c_{j,k+1} - {}_{k+1}V_x)\, v\, q_{j,x+k}. \tag{6.5.5}$$

Osiguravateljev ukupni gubitak

$$ L_x = c_{J_x,K_x+1}\, v^{K_x+1} - \sum_{k=0}^{K_x} \Pi_k\, v^k \tag{6.5.6}$$

možemo zapisati kao

$$ L_x = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k\, v^k \tag{6.5.7}$$

gdje je

$$ \Lambda_k = \begin{cases} 0 & \text{za } K_x \leq k-1, \\ -\Pi_k^r + (c_{J_x,k+1} - {}_{k+1}V)\, v & \text{za } K_x = k, \\ -\Pi_k^r & \text{za } K_x \geq k+1. \end{cases} \tag{6.5.8}$$

osiguravateljev gubitak u godini $k+1$ izračunat u trenutku $k$.

Komponentu premije

$$ \Pi_{j,k}^r = (c_{j,k+1} - {}_{k+1}V_x)\, v\, q_{j,x+k} \tag{6.5.9}$$

možemo interpretirati kao plaćanje za jednogodišnje osiguranje iznosa $c_{j,k+1} - {}_{k+1}V_x$ što pokriva rizik zbog smanjenja uzrokovan razlogom $j$. Osiguravateljev gubitak tijekom $(k+1)$-e godine može se rastaviti kao

$$ \Lambda_k = \Lambda_{1,k} + ... + \Lambda_{m,k} \tag{6.5.10}$$

ako definiramo

$$\Lambda_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{za } K_x \leq k-1, \\ -\Pi^r_{j,k} + (c_{j,k+1} - {}_{k+1}V)\, v & \text{za } K_x = k \text{ i } J_x = j, \\ -\Pi^r_{j,k} & \text{za } K_x = k \text{ i } J_x \neq j, \text{ili } K_x \geq k+1. \end{cases} \tag{6.5.11}$$

## 6.6 Neprekidni model

Pretpostavimo da je osigurana dobit definirana sa (6.4.3) i da se premije plaćaju neprekidno. Neka $\Pi(t)$ označava stopu premije u trenutku $t$. Gubitak osiguravatelja je

$$L_x = c_{J_x}(T_x)\, v^{T_x} - \int_0^{T_x} \Pi(t)\, v^t\, dt. \tag{6.6.1}$$

Neto premijska rezerva u trenutku $t$ dana je sa

$$V(t) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} c_j(t+h)\, v^h\, {}_hp_{x+t}\, \mu_{j,x+t+h}\, dh - \int_0^{\infty} \Pi(t+h)\, v^h\, {}_hp_{x+t}\, dh. \tag{6.6.2}$$

Stopa premije $\Pi(t)$ može se rastaviti na komponentu štednje

$$\Pi^s(t) = V'(t) - \delta V(t) \tag{6.6.3}$$

i komponentu rizika

$$\Pi^r(t) = \sum_{j=1}^{m} (c_j(t) - V(t))\, \mu_{j,x+t}. \tag{6.6.4}$$

# Poglavlje 7

# Višestruko životno osiguranje

Promaramo sustav od $m$ osoba s pristupnim dobima $x_1, x_2, ..., x_m$. Zbog jednostavnosti ćemo preostalo trajanje života $k$-te osobe, $T_{x_k}$, označavati sa $T_k$, $k = 1, 2, ..., m$. Na temelju tih $m$ elemenata ćemo definirati stanje $u$ s budućim trajanjem $T_u$. Sa ${}_tp_u$ označavamo uvjetnu vjerojatnost da je stanje $u$ nepromijenjeno u trenutku $t$ pri čemu je dano da je sustav u stanju $u$ u trenutku 0. Sa ${}_tq_u$ označavamo vjerojatnost da će stanje $u$ biti promijenjeno, tj. da će sustav izaći iz stanja $u$ unutar $t$ godina. Intenzitet smrtnosti definiramo slično kao do sada:

$$\mu_{u+t} = -\frac{d}{dt} \log {}_tp_u. \tag{7.1}$$

Godišnje prinose podrazumijevamo kako smo ih definirali do sada, samo u terminima od $u$. Npr. simbol $\ddot{a}_u$ označava jednokratnu neto premiju prenumerando rente s isplatom iznosa 1 sve dok stanje $u$ ostaje nepromijenjeno. Analogno sa stanjem $u$ definiramo i ostale rente.

Također, analizirat ćemo osiguranja koja donose dobit plativu u trenutku promjene stanja $u$. Npr. simbol $\bar{A}_u$ označavat će jednokratnu neto premiju osiguranog dobitka 1 plativog odmah nakon promjene stanja $u$.

## 7.1 Stanje združenih osoba

Stanje

$$u = x_1 : x_2 : ... : x_m \tag{7.1.1}$$

je definirano tako da traje toliko dugo dok je svih $m$ osoba živo. Pad, tj. promjena stanja združenih osoba nastupa u trenutku smrti prvog od njih:

$$T_u = \min(T_1, T_2, ..., T_m). \tag{7.1.2}$$

U daljnjim razmatranjima pretpostavljamo nezavisnost slučajnih varijabli $T_1, T_2, ..., T_m$. Vjerojatnosna distribucija trenutka pada stanja (7.1.1) je

$$\begin{aligned} {}_tp_{x_1:x_2:...:x_m} &= \mathbb{P}(T_u > t) \\ &= \mathbb{P}(T_1 > t, T_2 > t, ..., T_m > t) \\ &= \prod_{k=1}^{m} \mathbb{P}(T_k > t) = \prod_{k=1}^{m} {}_tp_{x_k}. \end{aligned} \tag{7.1.3}$$

Intenzitet pada stanja združenih osoba je prema (1.2.12)

$$\mu_{u+t} = -\frac{d}{dt} \log {}_tp_u = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{m} \log {}_tp_{x_k} = \sum_{k=1}^{m} \mu_{x_k+t}. \tag{7.1.4}$$

Ovaj identitet nas podsjeća na (6.2.2). Treba primijetiti da i navedeni identitet i (7.1.4) podrazumijevaju nezavisnost slučajnih varijabli $T_1, ..., T_m$. Sada možemo primijeniti principe iz poglavlja 2 i 3. Izračunajmo jednokratnu neto premiju za osiguranje života plativo u trenutku smrti prve od $m$ osoba:

$$A_{x_1:x_2:...:x_m} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_kp_{x_1:x_2:...:x_m} \, q_{x_1+k:x_2+k:...:x_m+k}. \tag{7.1.5}$$

Jednokratna neto premija prenumerando rente za stanje združenih osoba je

$$\ddot{a}_{x_1:x_2:...:x_m} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k} {}_kp_{x_1:x_2:...:x_m}. \tag{7.1.6}$$

Vrijede jednakosti slične onima u poglavlju 3, npr.

$$1 = d\,\ddot{a}_{x_1:x_2:...:x_m} + A_{x_1:x_2:...:x_m}. \tag{7.1.7}$$

Definicije i izvodi iz poglavlja 5 i 6 mogu se poopćiti zamjenom $(x)$ sa $(u)$.
Označimo li sa $\overline{n|}$ stanje koje sigurno pada u trenutku $n$:

$$T_{\overline{n|}} = n, \tag{7.1.8}$$

tada je $T_{x:\overline{n|}} = \min(T_x, n)$. Sada je očito da su simboli za jednokratnu neto premiju, $\bar{A}_{x:\overline{n|}}$ (mješovito osiguranje) i $\bar{a}_{x:\overline{n|}}$ (renta s određenim trajanjem), u skladu s notacijom združenih osoba.

## 7.2 Pojednostavljenje

Rezultati se značajno pojednostavljuju ako svi subjekti imaju isti Gompertzov zakon smrtnosti:

$$\mu_{x_k+t} = B\,e^{x_k+t}, \quad t \geq 0,\ k = 1, ..., m. \tag{7.2.1}$$

Rješavanjem jednadžbe

$$e^{x_1} + e^{x_2} + ... + e^{x_m} = e^{w} \tag{7.2.2}$$

po $w$, intenzitet pada stanja združenih osoba možemo izraziti kao

$$\mu_{u+t} = \mu_{w+t}, \quad t \geq 0. \tag{7.2.3}$$

Ovo povlači da pad stanja združenih osoba slijedi isti Gompertzov zakon smrtnosti kao i svaka individualna osoba, ali s početnim dobima $w$. Sve račune stanja združenih osoba možemo predstaviti u terminima jedne osobe $(w)$. Npr. imamo

$$A_{x_1:x_2:...:x_m} = A_w, \tag{7.2.4}$$

i

$$a_{x_1:x_2:...:x_m} = a_w. \tag{7.2.5}$$

Neka pojednostavljenja također dobivamo ako sve osobe slijede Makehamov zakon smrtnosti:

$$\mu_{x_k+t} = a + B\,e^{x_k+t}. \tag{7.2.6}$$

Neka je $w$ rješenje jednadžbe

$$e^{x_1} + e^{x_2} + ... + e^{x_m} = m\,e^{w}. \tag{7.2.7}$$

Tada iz (7.1.4) slijedi

$$\mu_{u+t} = m\,\mu_{w+t} = \mu_{w+t:w+t:...:w+t}, \quad t \geq 0. \tag{7.2.8}$$

Ovo znači da $m$ osoba koje su pristupnih dobi $x_1, x_2, ..., x_m$ možemo zamijeniti sa $m$ osoba s istom pristupnom dobi $w$. Npr.

$$a_{x_1:x_2:...:x_m} = a_{w:w:...:w} \tag{7.2.9}$$

Primijetimo da je $w$ definiran sa (7.2.7) neka vrsta sredine starosti komponenata $x_1, x_2, ..., x_m$, dok $w$ definiran u (7.2.2) premašuje starost svih komponenata $x_1, ..., x_m$.

Iako su pojednostavljenja predstavljena u ovom poglavlju vrlo elegantna, puno su izgubila na svojoj praktičnoj vrijednosti. Danas se formule (7.1.3), (7.1.5) i (7.1.6) mogu računati direktno.

## 7.3 Stanje posljednjeg preživjelog

*Stanje posljednjeg preživjelog*

$$u = \overline{x_1 : x_2 : ... : x_m} \tag{7.3.1}$$

je definirano tako da se smatra nepromijenjenim sve dok je posljednja osoba iz ove skupine živa. Dakle, stanje pada u trenutku

$$T_u = \max(T_1, T_2, ...T_m). \tag{7.3.2}$$

Stanje združenih osoba i stanje posljednjeg preživjelog mogu biti vizualizirani električnim krugovima. Stanje združenih osoba odgovara serijskom spoju od $m$ komponenti, a stanje posljednjeg preživjelog odgovara paralelnom spoju.
Vjerojatnosti i jednokratne neto premije u odnosu na stanje posljednjeg preživjelog mogu se računati koristeći stanje združenih osoba. Da bismo to vidjeli, potrebna nam je Sylvesterova formula iz teorije vjerojatnosti. Označimo sa $B_1, B_2, ..., B_m$ događaje takve da je $B_k = \{$ osoba k je živa u trenutku $t\ \}$. Vjerojatnost njihove unije je

$$\mathbb{P}(B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_m) = S_1 - S_2 + S_3 - ... + (-1)^{m-1} S_m \tag{7.3.3.}$$

gdje $S_k$ označava simetričnu sumu:

$$S_k = \sum \mathbb{P}(B_{j_1} \cap B_{j_2} \cap ... \cap B_{j_k}). \tag{7.3.4}$$

Sumacija ide po svim $k$-članim podskupovima $m$-članog skupa, tj. po svim $\binom{m}{k}$ podskupovima od $k$ događaja.
Iz (7.3.3) slijedi

$${}_tp_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}} = S_1^t - S_2^t + S_3^t - ... + (-1)^{m-1} S_m^t, \tag{7.3.5}$$

uz oznaku

$$S_k^t = \sum {}_tp_{x_{j_1}:x_{j_2}:\cdots:x_{j_k}}. \tag{7.3.6}$$

Množeći jednakost (7.3.5) s $v^k$ i sumiranjem po $t$, dobivamo analognu formulu za jednokratnu neto premiju prenumerando rente stanja posljednjeg preživjelog:

$$\ddot{a}_{\overline{x_1:x_2\cdots:x_m}} = S_1^{\ddot{a}} - S_2^{\ddot{a}} + S_3^{\ddot{a}} - \cdots + (-1)^{m-1} S_m^{\ddot{a}}. \tag{7.3.7}$$

Ovdje smo definirali

$$S_k^{\ddot{a}} = \sum \ddot{a}_{x_{j_1}:x_{j_2}:\cdots:x_{j_k}}. \tag{7.3.8}$$

Pretpostavimo sada da je osigurana isplata iznosa 1 plativa nakon zadnje smrti. Jednokratnu neto premiju možemo računati kako slijedi:

$$A_{\overline{x_1:x_2:\cdots:x_m}} = 1 - d\, \ddot{a}_{\overline{x_1:x_2:\cdots:x_m}}$$

$$= 1 - d\,(S_1^{\ddot{a}} - S_2^{\ddot{a}} + S_3^{\ddot{a}} - ...). \tag{7.3.9}$$

Definirajmo simetričnu sumu:

$$S_k^A = \sum A_{x_{j_1}:x_{j_2}:\cdots:x_{j_k}}. \tag{7.3.10}$$

Uvrštavanjem

$$S_k^{\ddot{a}} = \frac{\binom{m}{k} - S_k^A}{d} \tag{7.3.11}$$

u (7.3.9), dobivamo formulu

$$A_{\overline{x_1:x_2:\cdots:x_m}} = S_1^A - S_2^A + S_3^A - \cdots + (-1)^{m-1} S_m^A. \tag{7.3.12}$$

Treba primijetiti sličnost između jednakosti (7.3.5), (7.3.7) i (7.3.12). Slične jednakosti dobiju se i za jednokratne neto premije necjelobrojnih i neprekidnih renti ili osiguranja plativog točno u trenutku zadnje smrti.

Za ilustraciju promotrimo primjer 3 osobe s pristupnim dobima $x, y$ i $z$. U tom slučaju imamo

$$\ddot{a}_{\overline{x:y:z}} = S_1^{\ddot{a}} - S_2^{\ddot{a}} + S_3^{\ddot{a}}, \tag{7.3.13}$$

uz

$$\begin{aligned} S_1^{\ddot{a}} &= \ddot{a}_x + \ddot{a}_y + \ddot{a}_z, \\ S_2^{\ddot{a}} &= \ddot{a}_{x:y} + \ddot{a}_{x:z} + \ddot{a}_{y:z}, \\ S_3^{\ddot{a}} &= \ddot{a}_{x:y:z}. \end{aligned} \tag{7.3.14}$$

Jednokratne neto premije $\ddot{a}_{x:y}$, $\ddot{a}_{x:z}$, $\ddot{a}_{y:z}$ i $\ddot{a}_{x:y:z}$ mogu se računati koristeći (7.1.3) i (7.1.6).

## 7.4 Schuette-Nesbittova formula

Neka su $B_1, B_2, ..., B_m$ proizvoljni događaji. Neka $N$ označava broj onih događaja među danih $m$ koji su se dogodili. $N$ je slučajna varijabla s vrijednostima u skupu $0, 1, 2, ...m$. Za proizvoljno odabrane koeficijente $c_0, c_1, ...c_m$ vrijedi *Schuette-Nesbittova formula*

$$\sum_{n=0}^{m} c_n \mathbb{P}(N = n) = \sum_{k=0}^{m} \Delta^k c_o S_k, \tag{7.4.1}$$

uz $S_k$ definirano kao u (7.3.4) i $S_0 = 1$, gdje je $\Delta$ *operator diferencije*.
Za dokaz (7.4.1) koristit ćemo *operator pomaka* $E$ definiran s

$$E c_k = c_{k+1}. \tag{7.4.2}$$

Vrijedi $\Delta c_k = c_{k+1} - c_k = E\, c_k - c_k$. Operator pomaka i operator diferencije povezani su relacijom $E = 1 + \Delta$.
Kako je $1 - I_{B_j}$ karakteristična funkcija komplementa događaja $B_j$, lako se vidi

$$\sum_{n=0}^{m} I_{\{N=n\}} E^n = \prod_{j=1}^{m} (1 - I_{B_j} + I_{B_j} E)$$

$$= \prod_{j=1}^{m} (1 + I_{B_j} \Delta)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (\sum I_{B_{j_1} \cap B_{j_2} \cap \ldots \cap B_{j_k}}) \Delta^k. \tag{7.4.3}$$

Primjenjujući matematičko očekivanje na prethodnu jednakost dobivamo identitet operatora

$$\sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}(N = n) E^n = \sum_{k=0}^{m} S_k \Delta^k. \tag{7.4.4}$$

Primjenom ovog operatora na niz $(c_k)$ u $k = 0$ dobivamo

$$\sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}(N = n) E^n c_0 = \sum_{k=0}^{m} \Delta^k c_0 S_k. \tag{7.4.5}$$

Kako je $E^n c_0 = c_n$, dobivamo (7.4.1) čime je formula dokazana.

Schuette-Nesbittova formula je elegantna i korisna generalizacija mnogo starije Waringove formule koja izražava $\mathbb{P}(N = n)$ i $\mathbb{P}(N \geq n)$ u terminima $S_1, S_2, ..., S_m$.
Sada ćemo pokazati primjenu izvan područja aktuarske matematike. Stavimo li $c_n = z^n$ u (7.4.1), dobivamo formulu koja generira vjerojatnost kao funkciju od $N$,

$$\mathbb{E}[z^N] = \sum_{k=0}^{m} (z - 1)^k S_k. \tag{7.4.6}$$

Promotrimo sada ilustraciju sljedećeg problema. Pretpostavimo da je $m$ različitih pisama na slučajan način umetnuto u $m$ različito adresiranih omotnica. Neka je $B_j$ događaj da je $j$-to pismo umetnuto u odgovarajuće adresiranu omotnicu. Neka je $N$ broj pisama u odgovarajućim omotnicama. Iz

$$\mathbb{P}(B_{j_1} \cap \ldots \cap B_{j_k}) = \frac{1}{m(m-1)\ldots(m-k+1)}, \tag{7.4.7}$$

slijedi $S_k = 1/k!$.
Generatorska funkcija od $N$ je stoga

$$\mathbb{E}[z^N] = \sum_{k=0}^{m} \frac{(z-1)^k}{k!}. \tag{7.4.8}$$

Za $m \to \infty$ ova funkcija konvergira k $e^{z-1}$ što je generatorska funkcija Poissonove distribucije s parametrom 1. Za velike vrijednosti $m$, distribucija od $N$ može se stoga aproksimirati Poissonovom distribucijom s parametrom 1.

## 7.5 Opće simetrično stanje

Definiramo stanje

$$u = \overline{\phantom{xx}\overset{k}{x_1 : x_2 : \cdots : x_m}} \tag{7.5.1}$$

koje traje toliko dugo dok najmanje $k$ od početnih $m$ osoba živi. Dakle, stanje pada nakon $(m-k+1)$-e smrti. Stanje združenih osoba za $k = m$ i stanje posljednjeg preživjelog za $k = 1$ su očito specijalni slučajevi ovog stanja.

Stanje

$$u = \overline{\phantom{xx}\overset{[k]}{x_1 : x_2 : \cdots : x_m}} \tag{7.5.2}$$

je definirano tako da bude nepromijenjeno kada točno $k$ od $m$ života preživi. Stanje $u$ počinje postojati u $(m-k)$-oj smrti, a pada u trenutku $(m-k+1)$-e smrti. Stanje (7.5.2) će nam biti od interesa u kontekstu renti, ali ne i osiguranja.
U nastavku ćemo izračunati vrijednosti nekih renti i osiguranja. Opće rješenje slijedi iz *Schuette-Nesbittove formule*. Za proizvoljno odabrane koeficijente $c_0, c_1, ..., c_m$ imamo

$$\sum_{k=0}^{m} c_k \, {}_t p_{\overline{\overset{[k]}{x_1:x_2:\cdots:x_m}}} = \sum_{j=0}^{m} \Delta^j c_0 \, S_j^t \tag{7.5.3}$$

i slično

$$\sum_{k=0}^{m} c_k \, \ddot{a}_{\overline{\overset{[k]}{x_1:x_2:\cdots:x_m}}} = \sum_{j=0}^{m} \Delta^j c_0 \, S_j^{\ddot{a}}. \tag{7.5.4}$$

Ovdje su $S_j^t$ i $S_j^{\ddot{a}}$ definirane sa (7.3.6) i (7.3.8) za $j = 1, 2, ..., m$. Po definiciji uzimamo da je $S_0^t = 1$ i $S_0^{\ddot{a}} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|}$.
Jednakost (7.5.3) slijedi iz (7.4.1) gdje je $B_j$ uzet kao događaj $\{T_j \geq t\}$. Na sličan način se

dobije i (7.5.4).
Za proizvoljno odabrane koeficijente $d_1, d_2, ..., d_m$ imamo

$$\sum_{k=1}^{m} d_k \, {}_tp_{\overline{x_1:x_2:\cdots:x_m}}^{\;k} = \sum_{j=1}^{m} \Delta^{j-1} d_1 \, S_j^t \tag{7.5.5}$$

i slično

$$\sum_{k=1}^{m} d_k \, \ddot{a}_{\overline{x_1:x_2:\cdots:x_m}}^{\;k} = \sum_{j=1}^{m} \Delta^{j-1} d_1 \, S_j^{\ddot{a}}. \tag{7.5.6}$$

Zadnje dvije jednakosti su posljedica dviju jednakosti koje im prethode: uz

$$c_0 = 0, \;\; c_k = d_1 + ... + d_k \tag{7.5.7}$$

lijeva strana (7.5.5) i (7.5.6) poprima oblik (7.5.3) i (7.5.4).

Prednost izraza (7.5.5) i (7.5.6) je da mogu biti poopćeni na životno osiguranje:

$$\sum_{k=1}^{m} d_k \, A_{\overline{x_1:x_2:\cdots:x_m}}^{\;k} = \sum_{j=1}^{m} \Delta^{j-1} d_1 \, S_j^{A}. \tag{7.5.8}$$

Ova jednadžba dobivena je iz (7.5.6) na isti način kao što je (7.3.11) dobiveno iz (7.3.7).

Za ilustraciju ćemo promotriti neprekidnu rentu plativu četirima osobama s početnim dobima $w, x, y, z$. Iznos rate počinje na 8 i smanjuje se za 50% za svaku smrt. Jednokratna neto premija za ovakvu rentu je očito

$$8\overline{a}_{\overline{w:x:y:z}}^{\;[4]} + 4\overline{a}_{\overline{w:x:y:z}}^{\;[3]} + 2\overline{a}_{\overline{w:x:y:z}}^{\;[2]} + \overline{a}_{\overline{w:x:y:z}}^{\;[1]}, \tag{7.5.9}$$

tako imamo koeficijente $c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 4, c_4 = 8$.

Tablica diferencije je kako slijedi:

| $k$ | $c_k$ | $\Delta c_k$ | $\Delta^2 c_k$ | $\Delta^3 c_k$ | $\Delta^4 c_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 2 | 2 | 2 | 2 | | |
| 3 | 4 | 4 | | | |
| 4 | 8 | | | | |

Jednokratna neto premija je, primjenom formule analogne formuli (7.5.4), $S_1^{\overline{a}} + S_3^{\overline{a}}$, uz

$$S_1^{\overline{a}} = \overline{a}_w + \overline{a}_x + \overline{a}_y + \overline{a}_z,$$

$$S_3^{\overline{a}} = \overline{a}_{w:x:y} + \overline{a}_{w:x:z} + \overline{a}_{w:y:z} + \overline{a}_{x:y:z}. \tag{7.5.10}$$

Kao drugu ilustraciju promatramo životno osiguranje 3 osobe s početnim dobima $x, y, z$. Osiguran je iznos 2 za prvu smrt, 5 za drugu i 10 za treću smrt. Svaki od iznosa plativ je na kraju godine. Jednokratna neto premija ovakvog osiguranja je

$$2A_{\overline{w:x:y:z}}^{\,3} + 5A_{\overline{w:x:y:z}}^{\,2} + 10A_{\overline{w:x:y:z}}^{\,2} + 10A_{\overline{w:x:y:z}}. \tag{7.5.11}$$

Počevši sa $d_1 = 10, d_2 = 5, d_3 = 2$, možemo zapisati tablicu diferencije:

| $k$ | $d_k$ | $\Delta d_k$ | $\Delta^2 d_k$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 10 | -5 | 2 |
| 2 | 5 | -3 | |
| 3 | 2 | | |

Jednokratna neto premija takvog osiguranja je, prema formuli (7.5.8), $10S_1^A - 5S_2^A + 2S_3^A$ uz

$$\begin{aligned} S_1^A &= A_x + A_y + A_z, \\ S_2^A &= A_{x:y} + A_{x:z} + A_{y:z}, \\ S_3^A &= A_{x:y:z}. \end{aligned} \tag{7.5.12}$$

## 7.6 Asimetrične rente

Općenito, složeno stanje je manje simetrično. Npr., stanje

$$\overline{w:x} : \overline{y:z} \tag{7.6.1}$$

je nepromijenjeno ako su barem jedan od $(w)$ i $(x)$ i barem jedan od $(y)$ i $(z)$ živi.
Stanje pada u trenutku

$$T = \min\left(\max(T_w, T_x), \max(T_y, T_z)\right). \tag{7.6.2}$$

Za ovakvo stanje jednokratna neto premija rente može se računati u terminima jednokratne neto premije stanja združenih osoba. To slijedi iz

$$\begin{aligned} {}_tp_{\overline{u:v}} &= \mathbb{P}(T_{\overline{u:v}} > t) = \mathbb{P}(\max(T_u, T_v) > t) \\ &= \mathbb{P}(T_u > t) + \mathbb{P}(T_v > t) - \mathbb{P}(\min(T_u, T_v) > t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(T_u > t) + \mathbb{P}(T_v > t) - \mathbb{P}(T_{u:v} > t) \\
&= {}_t p_u + {}_t p_v - {}_t p_{u:v} \qquad (7.6.3)
\end{aligned}
$$

Dakle, vrijedi

$$a_{\overline{u:v}} = a_u + a_v - a_{u:v}, \qquad (7.6.4)$$

za proizvoljna stanja $u$ i $v$. Promotrimo rentu jedinice 1 dok traje stanje (7.6.1). Uzastopnom primjenom formule (7.6.4) dobivamo izraz za jednokratnu neto premiju:

$$
\begin{aligned}
a_{\overline{\overline{w:x}:y:z}} &= a_{\overline{w:x}:y} + a_{\overline{w:x}:z} - a_{\overline{w:x}:y:z} \\
&= a_{w:y} + a_{x:y} - a_{w:x:y} \\
&\quad + a_{w:z} + a_{x:z} - a_{w:x:z} \\
&\quad - a_{w:y:z} - a_{x:y:z} + a_{w:x:y:z}. \qquad (7.6.5)
\end{aligned}
$$

*Nasljedne rente* su relevantne kada proučavamo osiguranje udovica i siročadi. Simbol $\overline{a}_{x/y}$ označava jednokratnu neto premiju neprekidnog plaćanja s intenzitetom 1 koje počinje u trenutku smrti osobe $(x)$ i prestaje u trenutku smrti osobe $(y)$. Ova jednokratna neto premija može se izračunati uz pomoć relacije

$$\overline{a}_{x/y} = \overline{a}_y - \overline{a}_{x:y}. \qquad (7.6.6)$$

## 7.7 Asimetrična osiguranja

Promotrimo $m$ osoba iz poglavlja 7.1 i pretpostavimo nezavisnost njihovih budućih trajanja života. Općenito, osiguranje za prvu smrt osigurava dobit $c_j(t)$ ako osoba $j$ umre u trenutku $t$ (npr. stanje združenih osoba pada zbog uzroka $j$). Ovakvo osiguranje je matematički ekvivalentno osiguranju promatranom u poglavlju 6.4. Analogno formuli (6.4.4) jednokratna neto premija osiguranja prve smrti je

$$\sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty c_j(t)\, v^t\, {}_t p_{x_1:x_2:\cdots:x_m} \mu_{x_j+t}\, dt\,. \qquad (7.7.1)$$

Nasljedna renta promatrana u prethodnom poglavlju je ovog tipa. Definirajući

$$c_1(t) = \overline{a}_{y+t}\,,\;\; c_2(t) = 0 \qquad (7.7.2)$$

dobivamo

$$\overline{a}_{x/y} = \int_0^\infty \overline{a}_{y+t}\, v^t\, {}_tp_{x:y}\mu_{x+t}dt. \tag{7.7.3}$$

Ovaj izraz podrazumijeva nezavisnost $T_x$ i $T_y$ što je u suprotnosti sa (7.6.6).

U posebnom slučaju je $c_k(t) = 1$ i $c_j(t) = 0$ za $j \neq k$, a jednokratna neto premija označava se sa

$$\overline{A}_{x_1:\cdots:x_{k-1}:\overset{1}{x_k}:x_{k+1}:\cdots:x_m} \tag{7.7.4}$$

i dana je izrazom

$$\overline{A}_{x_1:\cdots:x_{k-1}:\overset{1}{x_k}:x_{k+1}:\cdots:x_m} = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_{x_1:x_2:\cdots:x_m}\, \mu_{x_k+t}dt\,. \tag{7.7.5}$$

Primijetimo da su simboli koje smo upoznali u drugom poglavlju, a koji označavaju jednokratnu neto premiju mješovitog osiguranja, specijalni slučajevi (7.7.4). Dobivamo ih tako da $\overline{n|}$ interpretiramo kao stanje koje pada u trenutku $n$.
Jednokratna neto premija (7.7.5) računa se na jednostavan način ako sve osobe imaju isti Gompertzov zakon smrtnosti (formula (7.2.1)). U tom slučaju,

$$\mu_{x_k+t} = \frac{e^{x_k}}{e^w}\mu_{x_1+t:x_2+t:\cdots:x_m+t} \tag{7.7.6}$$

gdje je $w$ definiran sa (7.2.2). Slijedi

$$\overline{A}_{x_1:\cdots:x_{k-1}:\overset{1}{x_k}:x_{k+1}:\cdots:x_m} = \frac{c^{x_k}}{c^w}\overline{A}_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = \frac{c^{x_k}}{c^w}\overline{A}_w. \tag{7.7.7}$$

Promotrimo sada osiguranje koje daje dobit od jedne jedinice u trenutku smrti osobe $(x_k)$ pod uvjetom da je to $r$-ta smrt. Jednokratnu neto premiju označavamo sa

$$\overline{A}_{x_1:\cdots:x_{k-1}:\overset{r}{x_k}:x_{k+1}:\cdots:x_m} \tag{7.7.8}$$

Da bi plaćanje bilo izvršeno u trenutku smrti osobe $(x_k)$ , točno $m-r$ od ostalih $m-1$ osoba mora nadživjeti osobu $(x_k)$. Stoga imamo

$$\overline{A}_{x_1:\cdots:x_{k-1}:\overset{r}{x_k}:x_{k+1}:\cdots:x_m} = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_{\overline{x_1:x_2:\cdots:x_{k-1}:x_{k+1}:\cdots:x_m}}^{[m-r]}\, {}_tp_{x_k}\, \mu_{x_k+t}\, dt\,. \tag{7.7.9}$$

Supstitucijom kao u jednadžbi (7.4.3), dobivamo linearnu kombinaciju jednokratne neto premije kao u (7.7.4) koja se jednostavnije računa.

Razmotrimo primjer

$$\overline{A}_{w:x:y:z}^{\;\;\;\;\;\;2} = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_{\overline{w:x:y}}^{\,[2]} \, {}_tp_z \, \mu_{z+t} \, dt \,. \tag{7.7.10}$$

Sada koristimo (7.5.3) s $c_0 = c_1 = c_3 = 0, \;\; c_2 = 1$ dobivamo

$${}_tp_{\overline{w:x:y}}^{\,[2]} = S_2^t - 3S_3^t = {}_tp_{w:x} + {}_tp_{w:y} + {}_tp_{x:y} - 3\,{}_tp_{w:x:y}. \tag{7.7.11}$$

Supstitucijom zadnjeg izraza u (7.7.10) dobivamo

$$\overline{A}_{w:x:y:z}^{\;\;\;\;\;\;2} = \overline{A}_{w:x:z}^{\;\;\;\;\;1} + \overline{A}_{w:y:z}^{\;\;\;\;\;1} + \overline{A}_{x:y:z}^{\;\;\;\;\;1} - 3\overline{A}_{w:x:y:z}^{\;\;\;\;\;\;1}. \tag{7.7.12}$$

# Poglavlje 8

# Zadaci

**Zadatak 1**
Zadano je:

1) $\delta = 0.055$,
2) $\mu_{x+t} = 0.045, t \geq 0$,
3) $\mu_{y+t} = 0.035, t \geq 0$.

Izračunajte $\overline{A}_{\substack{2\\x:y}}$ definirano formulom (7.7.9).

**Rješenje**:

$$\begin{aligned}
\overline{A}_{\substack{2\\x:y}} &= \int_o^\infty v^t(1 - {}_tp_y)\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\delta t}(1 - e^{-\mu_x t})e^{-\mu_y t}\mu_x dt \\
&= \mu_x(\frac{1}{\delta + \mu_x} - \frac{1}{\delta + \mu_x + \mu_y}) \\
&= 0.1167
\end{aligned}$$

**Zadatak 2**
Promatramo osobe $(x)$ i $(y)$. Osiguranje života osigurava isplatu iznosa 1 za drugu smrt. Ako osoba $(x)$ umre prije osobe $(y)$, isplaćuje se iznos 0.5 u trenutku smrti. Smrtnost za obje osobe prati Gompertzov zakon: intenzitet smrtnosti je dan sa $\mu_z = B e^z, z \geq 0$. Dokažite da je jednokratna neto premija za ovakvo osiguranje jednaka

$$\overline{A}_x + \overline{A}_y - \overline{A}_w(1 - 0.5\, e^{x-w})$$

gdje je $e^w = e^x + e^y$.

**Rješenje**:
Jednokratna neto premija je

$$0.5\,\overline{A}_{\overset{1}{x:y}} + \overline{A}_{\overline{x:y}} = 0.5\,\overline{A}_{\overset{1}{x:y}} + \overline{A}_x + \overline{A}_y - \overline{A}_{x:y}.$$

Sada koristimo rezultate iz diskusije o Gompertzovom zakon smrtnosti iz poglavlja 7.2:

$$\begin{aligned}
\overline{A}_{\overset{1}{x:y}} &= \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{x:y}\,\mu_{x+t}\,dt \\
&= \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{x:y}\,B\,e^{x+t}\,dt \\
&= \frac{e^x}{e^x+e^y}\int_0^\infty v^t\,{}_tp_{x:y}\,B\,e^{w+t}\,dt \\
&= \frac{e^x}{e^x+e^y}\int_0^\infty v^t\,{}_tp_{x:y}\,\mu_{w+t}\,dt \\
&= \frac{e^x}{e^x+e^y}\overline{A}_w \\
&= e^{x-w}\,\overline{A}_w
\end{aligned}$$

gdje je $e^w = e^x + e^y$.
Rješenje sada slijedi koristeći $\overline{A}_{x:y} = \overline{A}_w$.

**Zadatak 3**
Promatramo potpuno diskrretno osiguranje posljednjeg preživjelog za dvije nezavisne osobe dobi $x$. Osiguranana je isplata iznosa 1. Godišnje neto premije plaćaju se do prve smrti. Zadano je:

1) $A_x = 0.4$,
2) $A_{x:x} = 0.55$,
2) $a_x = 9.0$.

Izračunajte godišnju neto premiju.

**Rješenje**:
Neka $\Pi$ označava rješenje. Prema principu ekvivalencije vrijedi

$$\Pi\,\ddot{a}_{x:x} = A_{\overline{x:x}}.$$

Kako je $\ddot{a}_x = 1 + a_x = 10$ i $A_x = 1 - d\,\ddot{a}_x$, slijedi $d = 0.06$.
$A_{x:x} = 1 - d\,\ddot{a}_{x:x}$ pa vrijedi $\ddot{a}_{x:x} = 7.5$. Iz $A_{x:x} + A_{\overline{x:x}} = 2A_x$ slijedi $A_{\overline{x:x}} = 0.25$. Konačno, $\Pi = \frac{1}{30}$.

# Bibliografija

[1] Hans U. Gerber, *Life insurance mathematics*, Third Edition, Springer, 1997.

[2] Siniša Slijepčević, *Uvod u aktuarsku matematiku*, 9. siječnja 2012.

# Sažetak

Cilj ovog rada je objasniti višestruko životno osiguranje, tj. osiguranje života više osoba. U tu svrhu uvedena su zajednička stanja više osoba kao što su stanje združenih osoba, stanje posljednjeg preživjelog i opće simetrično stanje. Dokazana je Schuette-Nesbittova formula, a objašnjeni su i asimetrične rente i asimetrična osiguranja.
Kako bismo se mogli posvetiti temi diplomskog rada, na početku su objašnjeni osnovni pojmovi iz područja aktuarske matematike. Također su objašnjene vrste životnog osiguranja te njihove sadašnje vrijednosti i jednokratne neto premije. Rad sadrži i objašnjenja pojmova poput životnih renti, neto premija, neto premijskih rezervi te modela višestrukih uzroka smanjenja.

# Summary

The main goal of this paper is to explain the multiple life insurance, ie. the life insurance of multiple person. For this purpose, common status have been introduced such as the joint-life status, the last-survivor status and the general symmetric status. The Schuette-Nesbitt formula has been proven and asymmetric rents and asymmetric insurance are explained.
In order to be able to dedicate the subject of this paper, the basics of actuarial mathematics are explained at the beginning. Also, life insurance types have been explained, as well as their present values and net single premiums. The paper also includes explanations of concepts such as life annuities, net premiums, net premium reserves, and multiple decrement model.

# Životopis

Rođena sam 20.11.1994. godine u Varaždinu. Od 2001. do 2009. pohađam Osnovnu školu Podrute, a 2009. godine upisujem Prvu gimnaziju Varaždin, prirodoslovno-matematički smjer. 2013. godine upisujem prvu godinu preddiplomskog studija matematike na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu koji završavam u roku i stječem titulu univ.bacc.math. Nakon završenog preddiplomskog studija, 2016. godine upisujem diplomski studij Financijske i poslovne matematike koji trenutno završavam.
Od 2017. do 2018. godine aktivna sam članica projektne skupine Osobne financije studentske udruge Financijski klub koja djeluje na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu. Zbog promicanja financijske pismenosti mladih dobivam Rektorovu nagradu za društveno koristan rad u akademskoj i široj zajednici. U slobodno vrijeme volontiram u Zoološkom vrtu grada Zagreba.